Tentamen Vectoranalyse
23 februari 2006

Zet op elk vel je naam en student nummer. Gebruik voor elke som aparte vellen. De nummers tussen de haakjes geven het aantal punten aan voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\#}{3}$$

I) (5) Laat $D = \{(x,y) | \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), x \in [a,b]\}$ waarbij $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ en

- $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ voor alle $x \in (a,b)$,
- $\phi_1(a) = \phi_2(a)$,
- $\phi_1(b) = \phi_2(b)$.

Bewijs

$$\int_{\partial D} P dx = -\int\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

II) Laat $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x,y) = x^2 - y,$$
$$g(x,y) = x^3 - y.$$

a) (4) Bepaal alle kandidaten voor extremen van f onder de conditie $g = 0$.

b) (4) Gebruik de Hessianen van f en g om het type van deze kandidaten te bepalen.

III) Laat $D = \{(x,z) | x^2 + z^2 \leq 1\}$ en $\phi : D \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$\phi(x,z) = 10 + x^2 \sin^3(z).$$

Verder beschouw de oppervlakken

$$B = \{(x,y,z) | x^2 + z^2 = 1 \text{ en } 0 \leq y \leq \phi(x,z)\},$$

en

$$S = \{(x,y,z) | x^2 + z^2 \leq 1 \text{ en } y = \phi(x,z)\}.$$

4

De rand van B bestaat uit twee lussen, ∂D en ∂S. Het vectorveld F is gegeven door

$$F(x,y,z) = (-z, 0, x).$$

a) (3) Laat zien dat als $(x,y,z) \in B$ dan geldt dat $\mathrm{curl}(F)(x,y,z)$ ligt in het raakvlak van B in (x,y,z).

b) (5) bewijs dat

$$\int_{\partial S} F \cdot ds = \int_{\partial D} F \cdot ds$$

c) (3) Bereken

$$\int_{\partial S} F \cdot ds.$$

IV) (3) Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2.$$

Laat verder het lichaam

$$W = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq f(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Bereken het volume van W.

Hint: merk op dat het volume van W het "volume onder de grafiek" is van een of andere functie.